Zadatak 081 (Jenny, gimnazija)

Riješi sustav jednadžbi u ovisnosti od parametra a.

$$\begin{cases}(2\cdot a-1)\cdot x-a\cdot y=1\\ a\cdot x-y=a\end{cases}.$$

Rješenje 081

Ponovimo!

$$(a-b)^2=a^2-2\cdot a\cdot b+b^2 \quad , \quad a^2-b^2=(a-b)\cdot(a+b) \quad , \quad n=\frac{n}{1} \quad , \quad \frac{a}{b}-\frac{c}{d}=\frac{a\cdot d-b\cdot c}{b\cdot d}.$$

$$a\cdot\frac{b}{c}=\frac{a\cdot b}{c}.$$

Skratiti razlomak znači brojnik i nazivnik tog razlomka podijeliti istim brojem različitim od nule i jedinice

$$\frac{a\cdot n}{b\cdot n}=\frac{a}{b} \quad , \quad n\neq 0 \quad , \quad n\neq 1.$$

Parametar

Vladimir Anić, Ivo Goldstein, Rječnik stranih riječi, Novi Liber, Zagreb, 2002.

Veličina, obično realna varijabla, čije vrijednosti služe za razlikovanje elemenata nekog skupa točaka funkcija, jednadžbi ili drugih matematičkih objekata.

Bratoljub Klaić, Rječnik stranih riječi, Nakladni zavod MH, Zagreb, 1983.

Veličina o kojoj ovisi funkcija ili oblik krivulje.

Zakon distribucije množenja prema zbrajanju.

$$a\cdot(b+c)=a\cdot b+a\cdot c \quad , \quad a\cdot b+a\cdot c=a\cdot(b+c).$$

Opći oblik linearne jednadžbe glasi:

$$a\cdot x=b, \quad a, b\in R.$$

Moguća su tri slučaja.

① $\left.\begin{matrix}a\cdot x=b\\ a\neq 0\end{matrix}\right\} \Rightarrow x=\frac{b}{a}$ rješenje jednadžbe

② $\left.\begin{matrix}a\cdot x=b\\ a=0 \ , \ b\neq 0\end{matrix}\right\} \Rightarrow 0\cdot x=b \Rightarrow x=\frac{b}{0}$ jednadžba nema rješenja

Ne postoji broj koji bi pomnožen s nulom dao broj različit od nule.

③ $\left.\begin{matrix}a\cdot x=b\\ a=0 \ , \ b=0\end{matrix}\right\} \Rightarrow 0\cdot x=0 \Rightarrow x=\frac{0}{0}$ jednadžba je neodređena

Ima beskonačno mnogo rješenja, tj. jednakost je ispunjena za svako $x\in R$.

Riješimo sustav jednadžbi.

$$\left.\begin{matrix}(2\cdot a-1)\cdot x-a\cdot y=1\\ a\cdot x-y=a\end{matrix}\right\} \Rightarrow \begin{bmatrix}\text{metoda suprotnih}\\ \text{koeficijenata}\end{bmatrix} \Rightarrow \left.\begin{matrix}(2\cdot a-1)\cdot x-a\cdot y=1\\ a\cdot x-y=a \ /\cdot(-a)\end{matrix}\right\} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \left.\begin{matrix}(2\cdot a-1)\cdot x-a\cdot y=1\\ -a^2\cdot x+a\cdot y=-a^2\end{matrix}\right\} \Rightarrow \left.\begin{matrix}(2\cdot a-1)\cdot x-a\cdot y=1\\ -a^2\cdot x+a\cdot y=-a^2\end{matrix}\right\} \Rightarrow (2\cdot a-1)\cdot x-a^2\cdot x=1-a^2 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \left(2\cdot a-1-a^2\right)\cdot x=1-a^2 \Rightarrow \left(2\cdot a-1-a^2\right)\cdot x=1-a^2 \ /\cdot(-1) \Rightarrow \left(a^2-2\cdot a+1\right)\cdot x=a^2-1 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow (a-1)^2\cdot x=a^2-1 \Rightarrow (a-1)^2\cdot x=a^2-1 \ /\cdot\frac{1}{(a-1)^2} \Rightarrow x=\frac{a^2-1}{(a-1)^2}.$$

Računamo nepoznanicu y.

$$\left.\begin{array}{l} a\cdot x-y=a \\ x=\dfrac{a^2-1}{(a-1)^2}\end{array}\right\} \Rightarrow \left.\begin{array}{l} -y=a-a\cdot x \\ x=\dfrac{a^2-1}{(a-1)^2}\end{array}\right\} \Rightarrow \left.\begin{array}{l} -y=a-a\cdot x \ /\cdot(-1) \\ x=\dfrac{a^2-1}{(a-1)^2}\end{array}\right\} \Rightarrow \left.\begin{array}{l} y=a\cdot x-a \\ x=\dfrac{a^2-1}{(a-1)^2}\end{array}\right\} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \left.\begin{array}{l} y=a\cdot(x-1) \\ x=\dfrac{a^2-1}{(a-1)^2}\end{array}\right\} \Rightarrow \left[\begin{array}{l}\text{metoda} \\ \text{supstitucije}\end{array}\right] \Rightarrow y=a\cdot\left(\frac{a^2-1}{(a-1)^2}-1\right) \Rightarrow y=a\cdot\left(\frac{a^2-1}{(a-1)^2}-\frac{1}{1}\right) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow y=a\cdot\frac{a^2-1-(a-1)^2}{(a-1)^2} \Rightarrow y=a\cdot\frac{a^2-1-\left(a^2-2\cdot a+1\right)}{(a-1)^2} \Rightarrow y=a\cdot\frac{a^2-1-a^2+2\cdot a-1}{(a-1)^2} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow y=a\cdot\frac{a^2-1-a^2+2\cdot a-1}{(a-1)^2} \Rightarrow y=a\cdot\frac{-1+2\cdot a-1}{(a-1)^2} \Rightarrow y=a\cdot\frac{2\cdot a-2}{(a-1)^2} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow y=a\cdot\frac{2\cdot(a-1)}{(a-1)^2} \Rightarrow y=\frac{2\cdot a\cdot(a-1)}{(a-1)^2}.$$

Diskusija!

1. Slučaj

Za a = 1 sustav ima beskonačno mnogo rješenja.

$$\left.\begin{array}{l} x=\dfrac{a^2-1}{(a-1)^2} \\ y=\dfrac{2\cdot a\cdot(a-1)}{(a-1)^2} \\ a=1\end{array}\right\} \Rightarrow \left.\begin{array}{l} x=\dfrac{1^2-1}{(1-1)^2} \\ y=\dfrac{2\cdot1\cdot(1-1)}{(1-1)^2}\end{array}\right\} \Rightarrow \left.\begin{array}{l} x=\dfrac{1-1}{0^2} \\ y=\dfrac{2\cdot1\cdot0}{0^2}\end{array}\right\} \Rightarrow \left.\begin{array}{l} x=\dfrac{0}{0} \\ y=\dfrac{0}{0}\end{array}\right\}.$$

2. Slučaj

Ako je a ≠ 1, onda sustav ima rješenje:

$$\left.\begin{array}{l} x=\dfrac{a^2-1}{(a-1)^2} \\ y=\dfrac{2\cdot a\cdot(a-1)}{(a-1)^2} \\ a\neq1\end{array}\right\} \Rightarrow \left.\begin{array}{l} x=\dfrac{(a-1)\cdot(a+1)}{(a-1)^2} \\ y=\dfrac{2\cdot a\cdot(a-1)}{(a-1)^2}\end{array}\right\} \Rightarrow \left.\begin{array}{l} x=\dfrac{(a-1)\cdot(a+1)}{(a-1)^2} \\ y=\dfrac{2\cdot a\cdot(a-1)}{(a-1)^2}\end{array}\right\} \Rightarrow \left.\begin{array}{l} x=\dfrac{a+1}{a-1} \\ y=\dfrac{2\cdot a}{a-1}\end{array}\right\}.$$

Vježba 081

Riješi sustav jednadžbi u ovisnosti od parametra a.

$$\left\{\begin{array}{l} (2\cdot a-1)\cdot x-1=a\cdot y \\ a\cdot(x-1)=y\end{array}\right..$$

Rezultat: Za a =1 sustav ima beskonačno mnogo rješenja. Ako je a ≠ 1, onda sustav ima rješenje: $x = \frac{a+1}{a-1}$, $y = \frac{2 \cdot a}{a-1}$.

Zadatak 082 (Igor, srednja škola)

Neka je a zadani realni broj. U sustavu jednadžbi $\begin{cases} 3 \cdot x + 2 \cdot y = a \\ 2 \cdot x + y - 1 = 0 \end{cases}$ odredite nepoznanicu x. (U rješenju će se pojaviti broj a.)

Rješenje 082

Ponovimo!

Zakon distribucije množenja prema zbrajanju.

$$a \cdot (b + c) = a \cdot b + a \cdot c \quad , \quad a \cdot b + a \cdot c = a \cdot (b + c).$$

Iz sustava jednadžbi odredimo nepoznanicu x.

$$\left.\begin{matrix} 3 \cdot x + 2 \cdot y = a \\ 2 \cdot x + y - 1 = 0 \end{matrix}\right\} \Rightarrow \left.\begin{matrix} 3 \cdot x + 2 \cdot y = a \\ y = -2 \cdot x + 1 \end{matrix}\right\} \Rightarrow \left[\begin{matrix} \text{metoda} \\ \text{supstitucije} \end{matrix}\right] \Rightarrow 3 \cdot x + 2 \cdot (-2 \cdot x + 1) = a \Rightarrow$$

$$\Rightarrow 3 \cdot x - 4 \cdot x + 2 = a \Rightarrow 3 \cdot x - 4 \cdot x = a - 2 \Rightarrow -x = a - 2 \Rightarrow -x = a - 2 \; / \cdot (-1) \Rightarrow x = 2 - a.$$

Vježba 082

Neka je a zadani realni broj. U sustavu jednadžbi $\begin{cases} 3 \cdot x + 2 \cdot y = a \\ x + y - 1 = 0 \end{cases}$ odredite nepoznanicu x. (U rješenju će se pojaviti broj a.)

Rezultat: $x = a - 2.$

Zadatak 083 (Erna, srednja škola)

Ako u pravokutnom trokutu jednu katetu produljimo za 3 cm, a drugu umanjimo za 1 cm, ploština se neće promijeniti. Međutim, ako prvu katetu produljimo za 8 cm, a drugu umanjimo za 1 cm, ploština se poveća za 10 cm^2. Kolike su katete trokuta?

Rješenje 083

Ponovimo!

Zakon distribucije množenja prema zbrajanju.

$$a \cdot (b + c) = a \cdot b + a \cdot c \quad , \quad a \cdot b + a \cdot c = a \cdot (b + c).$$

Množenje zagrada

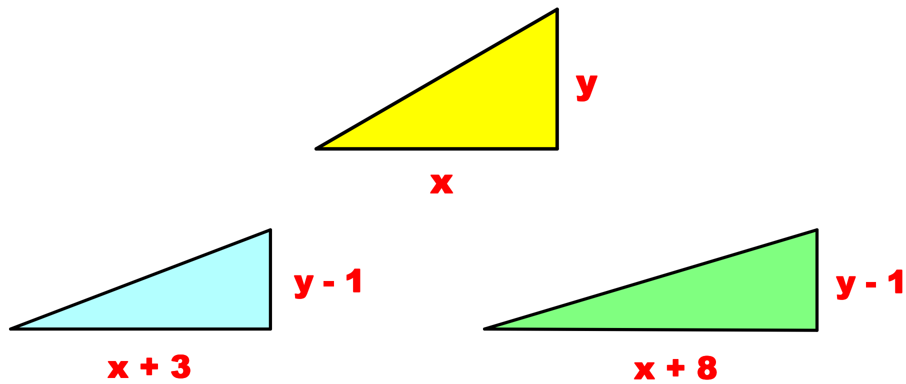
$$(a + b) \cdot (c + d) = a \cdot c + a \cdot d + b \cdot c + b \cdot d.$$

Trokut je dio ravnine omeđen s tri dužine. Te dužine zovemo stranice trokuta.
Pravokutni trokuti imaju jedan pravi kut (kut od 90º). Stranice koje zatvaraju pravi kut zovu se katete, a najdulja stranica je hipotenuza pravokutnog trokuta.
Ploština pravokutnog trokuta duljina kateta a i b izračunava se po formuli:

$$P = \frac{a \cdot b}{2}.$$

Kako zapisati da je "broj a za n veći od broja b"?

$$a - n = b \quad , \quad a = b + n \quad , \quad a - b = n.$$



Neka su x i y duljine kateta pravokutnog trokuta. Njegova ploština je

$$P=\frac{x\cdot y}{2}.$$

Ako u pravokutnom trokutu jednu katetu produljimo za 3 cm, a drugu umanjimo za 1 cm, ploština se neće promijeniti. Pomoću jednadžbe to možemo ovako zapisati:

$$\frac{(x+3)\cdot(y-1)}{2}=\frac{x\cdot y}{2}.$$

Međutim, ako prvu katetu produljimo za 8 cm, a drugu umanjimo za 1 cm, ploština se poveća za 10 cm^2. Tada jednadžba glasi:

$$\frac{(x+8)\cdot(y-1)}{2}=\frac{x\cdot y}{2}+10.$$

Iz sustava jednadžbi izračunamo x i y.

$$\left.\begin{array}{l}\frac{(x+3)\cdot(y-1)}{2}=\frac{x\cdot y}{2}\\ \frac{(x+8)\cdot(y-1)}{2}=\frac{x\cdot y}{2}+10\end{array}\right\}\Rightarrow\left.\begin{array}{l}\frac{(x+3)\cdot(y-1)}{2}=\frac{x\cdot y}{2}\ /\cdot 2\\ \frac{(x+8)\cdot(y-1)}{2}=\frac{x\cdot y}{2}+10\ /\cdot 2\end{array}\right\}\Rightarrow\left.\begin{array}{l}(x+3)\cdot(y-1)=x\cdot y\\ (x+8)\cdot(y-1)=x\cdot y+20\end{array}\right\}\Rightarrow$$

$$\Rightarrow\left.\begin{array}{l}x\cdot y-x+3\cdot y-3=x\cdot y\\ x\cdot y-x+8\cdot y-8=x\cdot y+20\end{array}\right\}\Rightarrow\left.\begin{array}{l}x\cdot y-x+3\cdot y-3=x\cdot y\\ x\cdot y-x+8\cdot y-8=x\cdot y+20\end{array}\right\}\Rightarrow\left.\begin{array}{l}-x+3\cdot y-3=0\\ -x+8\cdot y-8=20\end{array}\right\}\Rightarrow$$

$$\Rightarrow\left.\begin{array}{l}-x+3\cdot y=3\\ -x+8\cdot y=20+8\end{array}\right\}\Rightarrow\left.\begin{array}{l}-x+3\cdot y=3\\ -x+8\cdot y=28\end{array}\right\}\Rightarrow\left[\begin{array}{l}\text{metoda suprotnih}\\ \text{koeficijenata}\end{array}\right]\Rightarrow\left.\begin{array}{l}-x+3\cdot y=3\ /\cdot(-1)\\ -x+8\cdot y=28\end{array}\right\}\Rightarrow$$

$$\Rightarrow\left.\begin{array}{l}x-3\cdot y=-3\\ -x+8\cdot y=28\end{array}\right\}\Rightarrow 5\cdot y=25\Rightarrow 5\cdot y=25\ /:5\Rightarrow y=5.$$

Računamo x.

$$\left.\begin{array}{l}x-3\cdot y=-3\\ y=5\end{array}\right\}\Rightarrow x-3\cdot 5=-3\Rightarrow x-15=-3\Rightarrow x=-3+15\Rightarrow x=12.$$

Katete trokuta su x = 12 cm i y = 5 cm.

Vježba 083

Ako u pravokutnom trokutu jednu katetu produljimo za 3 dm, a drugu umanjimo za 1 dm, ploština se neće promijeniti. Međutim, ako prvu katetu produljimo za 8 dm, a drugu umanjimo za 1 dm, ploština se poveća za 10 dm^2. Kolike su stranice trokuta?

Rezultat: x = 12 dm, y = 5 dm.

Zadatak 084 (4A, TUPŠ)

Kolika je vrijednost y u rješenju sustava jednadžbi $\begin{cases} \frac{1}{x}+\frac{1}{y}=3 \\ \frac{1}{x}-\frac{1}{y}=5 \end{cases}$?

$A.\ y=-2 \qquad B.\ y=-1 \qquad C.\ y=1 \qquad D.\ y=2$

Rješenje 084

Ponovimo!

$$\frac{a}{b}=\frac{c}{d} \Rightarrow \frac{b}{a}=\frac{d}{c} \quad , \quad n=\frac{n}{1}.$$

$$\left.\begin{array}{l} \frac{1}{x}+\frac{1}{y}=3 \\ \frac{1}{x}-\frac{1}{y}=5 \end{array}\right\} \Rightarrow \left[\begin{array}{l} \text{metoda suprotnih} \\ \text{koeficijenata} \end{array}\right] \Rightarrow \left.\begin{array}{l} \frac{1}{x}+\frac{1}{y}=3 \\ \frac{1}{x}-\frac{1}{y}=5 \ /\cdot(-1) \end{array}\right\} \Rightarrow \left.\begin{array}{l} \frac{1}{x}+\frac{1}{y}=3 \\ -\frac{1}{x}+\frac{1}{y}=-5 \end{array}\right\} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow 2\cdot\frac{1}{y}=-2 \Rightarrow 2\cdot\frac{1}{y}=-2 \ /:2 \Rightarrow \frac{1}{y}=-1 \Rightarrow \frac{1}{y}=-\frac{1}{1} \Rightarrow y=-1.$$

Vježba 084

Kolika je vrijednost x u rješenju sustava jednadžbi $\begin{cases} \frac{1}{x}+\frac{1}{y}=3 \\ \frac{1}{x}-\frac{1}{y}=5 \end{cases}$?

$A.\ y=\frac{1}{4} \qquad B.\ y=-\frac{1}{4} \qquad C.\ y=4 \qquad D.\ y=-4$

Rezultat: A.

Zadatak 085 (4A, TUPŠ)

Cijena C najma automobila određuje se prema formuli: C = n · D + m · K, gdje je n broj dana na koje je automobil bio unajmljen, D cijena najma automobila na jedan dan, m broj prijeđenih kilometara, a K cijena jednog prijeđenog kilometra. Cijena najma automobila koji je iznajmljen na dva dana s prijeđenih 160 km iznosi 866 kn. Cijena najma automobila za 3 dana i 120 prijeđenih kilometara iznosi 723 kn. Kolika je cijena najma automobila po danu? Koliko je plaćen najam automobila koji je u četiri dana prešao 240 km?

Rješenje 085

Ponovimo!

$$a=b \Rightarrow b=a.$$

Cijena C najma automobila određuje se prema formuli:

$$\left.\begin{array}{l} C-\text{cijena najma automobila} \\ n-\text{broj dana najma} \\ D-\text{cijena najma na jedan dan} \\ m-\text{broj prijeđenih kilometara} \\ K-\text{cijena jednog prijeđenog kilometra} \end{array}\right\} \Rightarrow C=n\cdot D+m\cdot K.$$

Iz uvjeta zadatka postavimo sustav od dvije jednadžbe sa dvije nepoznanice D i K.

$$\left.\begin{array}{l} C=866 \;,\; n=2 \;,\; m=160 \\ C=723 \;,\; n=3 \;,\; m=120 \end{array}\right\} \Rightarrow \left[C=n\cdot D+m\cdot K\right] \Rightarrow \left.\begin{array}{l} 866=2\cdot D+160\cdot K \\ 723=3\cdot D+120\cdot K \end{array}\right\} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \left.\begin{array}{l} 2\cdot D+160\cdot K=866 \\ 3\cdot D+120\cdot K=723 \end{array}\right\} \Rightarrow \left.\begin{array}{l} 2\cdot D+160\cdot K=866 \;/:2 \\ 3\cdot D+120\cdot K=723 \;/:3 \end{array}\right\} \Rightarrow \left.\begin{array}{l} D+80\cdot K=433 \\ D+40\cdot K=241 \end{array}\right\} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \left[\begin{array}{l} \text{metoda suprotnih} \\ \text{koeficijenata} \end{array}\right] \Rightarrow \left.\begin{array}{l} D+80\cdot K=433 \\ D+40\cdot K=241 \;/\cdot(-2) \end{array}\right\} \Rightarrow \left.\begin{array}{l} D+80\cdot K=433 \\ -2\cdot D-80\cdot K=-482 \end{array}\right\} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow -D=-49 \Rightarrow -D=-49 \;/\cdot(-1) \Rightarrow D=49.$$

Cijena najma automobila po danu je 49 kn.
Računamo K cijenu jednog prijeđenog kilometra.

$$\left.\begin{array}{l} D+40\cdot K=241 \\ D=49 \end{array}\right\} \Rightarrow 49+40\cdot K=241 \Rightarrow 40\cdot K=241-49 \Rightarrow 40\cdot K=192 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow 40\cdot K=192 \;/:40 \Rightarrow K=4.80.$$

Cijena jednog prijeđenog kilometra je 4.80 kn.
Plaćeni najam automobila koji je u četiri dana prešao 240 km iznosi:

$$\left.\begin{array}{l} n=4 \;,\; m=240 \\ D=49 \;,\; K=4.80 \end{array}\right\} \Rightarrow \left[C=n\cdot D+m\cdot K\right] \Rightarrow C=4\cdot 49+240\cdot 4.80 \Rightarrow C=1348.$$

Plaćeni najam je 1348 kn.



Vježba 085

Cijena C najma automobila određuje se prema formuli: C = n · D + m · K, gdje je n broj dana na koje je automobil bio unajmljen, D cijena najma automobila na jedan dan, m broj prijeđenih kilometara, a K cijena jednog prijeđenog kilometra. Cijena najma automobila koji je iznajmljen na četiri dana s prijeđenih 320 km iznosi 1732 kn. Cijena najma automobila za 6 dana i 240 prijeđenih kilometara iznosi 1446 kn. Kolika je cijena najma automobila po danu?

Rezultat: 49 kn.

Zadatak 086 (Maja, gimnazija)

Za različite brojeve x, y, z od kojih nijedan nije jednak nuli vrijedi $x+\frac{1}{y}=y+\frac{1}{z}=z+\frac{1}{x}.$

Vrijednost izraza $x^2\cdot y^2\cdot z^2$ je jednaka:

$$A.\ \frac{1}{2} \qquad B.\ 1 \qquad C.\ \frac{1}{4} \qquad D.\ \frac{1}{8}$$

Rješenje 086

Ponovimo!

$$\frac{a}{b}-\frac{c}{d}=\frac{a\cdot d-b\cdot c}{b\cdot d} \quad , \quad \left.\begin{array}{l} a=b \\ c=d \end{array}\right\} \Rightarrow a\cdot c=b\cdot d \quad , \quad a^1=a \quad , \quad a^n\cdot a^m=a^{n+m}.$$

Zakon distribucije množenja prema zbrajanju.

$$a\cdot(b+c)=a\cdot b+a\cdot c \quad , \quad a\cdot b+a\cdot c=a\cdot(b+c).$$

Skratiti razlomak znači brojnik i nazivnik tog razlomka podijeliti istim brojem različitim od nule i jedinice

$$\frac{a \cdot n}{b \cdot n} = \frac{a}{b} \ , \ n \neq 0 \ , \ n \neq 1.$$

Postavimo sustav od tri jednadžbe sa tri nepoznanice i preoblikujemo ga na sljedeći način:

$$\left.\begin{array}{l} x + \frac{1}{y} = y + \frac{1}{z} \\ x + \frac{1}{y} = z + \frac{1}{x} \\ y + \frac{1}{z} = z + \frac{1}{x} \end{array}\right\} \Rightarrow \left.\begin{array}{l} x - y = \frac{1}{z} - \frac{1}{y} \\ x - z = \frac{1}{x} - \frac{1}{y} \\ y - z = \frac{1}{x} - \frac{1}{z} \end{array}\right\} \Rightarrow \left.\begin{array}{l} x - y = \frac{y - z}{y \cdot z} \\ x - z = \frac{y - x}{x \cdot y} \\ y - z = \frac{z - x}{x \cdot z} \end{array}\right\} \Rightarrow \left.\begin{array}{l} x - y = \frac{y - z}{y \cdot z} \ / \cdot \frac{y \cdot z}{x - y} \\ x - z = \frac{y - x}{x \cdot y} \ / \cdot \frac{x \cdot y}{x - z} \\ y - z = \frac{z - x}{x \cdot z} \ / \cdot \frac{x \cdot z}{y - z} \end{array}\right\} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \left.\begin{array}{l} y \cdot z = \frac{y - z}{x - y} \\ x \cdot y = \frac{y - x}{x - z} \\ x \cdot z = \frac{z - x}{y - z} \end{array}\right\} \Rightarrow \left[\begin{array}{l} \text{pomnožimo} \\ \text{jednadžbe} \end{array}\right] \Rightarrow y \cdot z \cdot x \cdot y \cdot x \cdot z = \frac{y - z}{x - y} \cdot \frac{y - x}{x - z} \cdot \frac{z - x}{y - z} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow x^2 \cdot y^2 \cdot z^2 = \frac{y - z}{x - y} \cdot \frac{-(x - y)}{x - z} \cdot \frac{-(x - z)}{y - z} \Rightarrow x^2 \cdot y^2 \cdot z^2 = \frac{y - z}{x - y} \cdot \frac{x - y}{x - z} \cdot \frac{x - z}{y - z} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow x^2 \cdot y^2 \cdot z^2 = \frac{y - z}{x - y} \cdot \frac{x - y}{x - z} \cdot \frac{x - z}{y - z} \Rightarrow x^2 \cdot y^2 \cdot z^2 = 1.$$

Odgovor je pod B.

Vježba 086

Za različite brojeve x, y, z od kojih nijedan nije jednak nuli vrijedi

$\frac{y}{1 + x \cdot y} = \frac{z}{1 + y \cdot z} = \frac{x}{1 + x \cdot z}$. Vrijednost izraza $x^2 \cdot y^2 \cdot z^2$ je jednaka:

$$A. \ \frac{1}{2} \qquad B. \ 1 \qquad C. \ \frac{1}{4} \qquad D. \ \frac{1}{8}$$

Rezultat: B.

Zadatak 087 (Vern, ekonomska škola)

Riješite sustav jednadžbi

$$\begin{cases} x = 3 \cdot y \\ y^2 = 6 \cdot x \end{cases}.$$

Rješenje 087

Ponovimo!

$$(a \cdot b) \cdot c = a \cdot (b \cdot c).$$

Zakon distribucije množenja prema zbrajanju.

$$a \cdot (b + c) = a \cdot b + a \cdot c \quad , \quad a \cdot b + a \cdot c = a \cdot (b + c).$$

Da bi umnožak bio jednak nuli, dovoljno je da jedan faktor bude jednak nuli.

$$a \cdot b = 0 \Leftrightarrow a = 0 \ \text{ili} \ b = 0 \ \text{ili} \ a = b = 0.$$

$$\left.\begin{array}{l} x = 3 \cdot y \\ y^2 = 6 \cdot x \end{array}\right\} \Rightarrow \left[\begin{array}{l} \text{metoda} \\ \text{supstitucije} \end{array}\right] \Rightarrow y^2 = 6 \cdot (3 \cdot y) \Rightarrow y^2 = 18 \cdot y \Rightarrow y^2 - 18 \cdot y = 0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow y \cdot (y - 18) = 0 \Rightarrow \left.\begin{array}{l} y = 0 \\ y - 18 = 0 \end{array}\right\} \Rightarrow \left.\begin{array}{l} y_1 = 0 \\ y_2 = 18 \end{array}\right\}.$$

Sustav ima dva rješenja.
Računamo nepoznanicu x.

- $\left.\begin{array}{l} x = 3 \cdot y \\ y = 0 \end{array}\right\} \Rightarrow x = 3 \cdot 0 \Rightarrow x = 0 \Rightarrow (x_1, y_1) = (0, 0).$
- $\left.\begin{array}{l} x = 3 \cdot y \\ y = 18 \end{array}\right\} \Rightarrow x = 3 \cdot 18 \Rightarrow x = 54 \Rightarrow (x_2, y_2) = (54, 18).$

Vježba 087

Riješite sustav jednadžbi

$$\left\{\begin{array}{l} x = 2 \cdot y \\ y^2 = 6 \cdot x \end{array}\right. .$$

Rezultat: $(x_1, y_1) = (0, 0), (x_2, y_2) = (24, 12).$

Zadatak 088 (Anita, gimnazija)

Ako je x + y = 5, y + z = 7, z + u = 9, koliko je u + x?

Rješenje 088

Ponovimo!

$$\left.\begin{array}{l} a = b \\ c = d \end{array}\right\} \Rightarrow a + c = b + d \quad , \quad a + b = b + a, \ a \in R, \ b \in R.$$

Zakon distribucije množenja prema zbrajanju.

$$a \cdot (b + c) = a \cdot b + a \cdot c \quad , \quad a \cdot b + a \cdot c = a \cdot (b + c).$$

1.inačica

Zbrajanjem zadanih jednadžbi dobije se:

$$\left.\begin{array}{l} x + y = 5 \\ y + z = 7 \\ z + u = 9 \end{array}\right\} \Rightarrow \left[\begin{array}{l} \text{zbrojimo} \\ \text{jednadžbe} \end{array}\right] \Rightarrow x + y + y + z + z + u = 5 + 7 + 9 \Rightarrow x + 2 \cdot y + 2 \cdot z + u = 21 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow x + 2 \cdot (y + z) + u = 21 \Rightarrow [y + z = 7] \Rightarrow x + 2 \cdot 7 + u = 21 \Rightarrow x + 14 + u = 21 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow x + u = 21 - 14 \Rightarrow x + u = 7 \Rightarrow u + x = 7.$$

2.inačica

$$\left.\begin{array}{l} x + y = 5 \\ y + z = 7 \\ z + u = 9 \end{array}\right\} \Rightarrow \left.\begin{array}{l} x + y = 5 \\ y + z = 7 \\ z = 9 - u \end{array}\right\} \Rightarrow \left[\begin{array}{l} \text{metoda} \\ \text{supstitucije} \end{array}\right] \Rightarrow \left.\begin{array}{l} x + y = 5 \\ y + 9 - u = 7 \end{array}\right\} \Rightarrow \left.\begin{array}{l} x + y = 5 \\ y = 7 - 9 + u \end{array}\right\} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \left.\begin{array}{l} x + y = 5 \\ y = -2 + u \end{array}\right\} \Rightarrow \left[\begin{array}{l} \text{metoda} \\ \text{supstitucije} \end{array}\right] \Rightarrow x - 2 + u = 5 \Rightarrow x + u = 5 + 2 \Rightarrow x + u = 7 \Rightarrow u + x = 7.$$

Vježba 088

Ako je x + y = 1, y + z = 3, z + u = 5, koliko je u + x?

Rezultat: 3.

Zadatak 089 (Matea, Ivana, Petra, TUPŠ)

Darija je dva dana kupovala ukrasne kamenčiće za ogrlice. Prvi je dan kupila 56 plavih i 6 žutih, a drugi dan 12 plavih i 37 žutih ukrasnih kamenčića. Oba je dana platila po 400 kn. Za koliko se kuna razlikuju cijene plavog i žutog kamenčića?

$A.$ za 2.30 kn $B.$ za 2.45 kn $C.$ za 2.60 kn $D.$ za 2.75 kn

Rješenje 089

Ponovimo!

$$1\ kn = 100\ lp.$$



x - cijena plavog kamenčića



y - cijena žutog kamenčića

Označimo slovom x cijenu plavog kamenčića, a slovom y cijenu žutog kamenčića.

- Darija je prvog dana kupila 56 plavih i 6 žutih kamenčića i platila 400 kn. Zapišimo to u obliku jednadžbe:

$$56 \cdot x + 6 \cdot y = 400.$$

- Darija je drugog dana kupila 12 plavih i 37 žutih kamenčića i ponovno platila 400 kn. Zapišimo to u obliku jednadžbe:

$$12 \cdot x + 37 \cdot y = 400.$$

Iz sustava jednadžbi izračunamo x i y.

$$\left.\begin{array}{l} 56 \cdot x + 6 \cdot y = 400 \\ 12 \cdot x + 37 \cdot y = 400 \end{array}\right\} \Rightarrow \left.\begin{array}{l} 56 \cdot x + 6 \cdot y = 400 \ /:2 \\ 12 \cdot x + 37 \cdot y = 400 \end{array}\right\} \Rightarrow \left.\begin{array}{l} 28 \cdot x + 3 \cdot y = 200 \\ 12 \cdot x + 37 \cdot y = 400 \end{array}\right\} \Rightarrow \left[\begin{array}{l} \text{metoda suprotnih} \\ \text{koeficijenata} \end{array}\right] \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \left.\begin{array}{l} 28 \cdot x + 3 \cdot y = 200 \ / \cdot (-3) \\ 12 \cdot x + 37 \cdot y = 400 \ / \cdot 7 \end{array}\right\} \Rightarrow \left.\begin{array}{l} -84 \cdot x - 9 \cdot y = -600 \\ 84 \cdot x + 259 \cdot y = 2800 \end{array}\right\} \Rightarrow 250 \cdot y = 2200 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow 250 \cdot y = 2200 \ /:250 \Rightarrow y = 8.80.$$

Cijena jednog žutog kamenčića je 8.80 kn.
Računamo nepoznanicu x, cijenu plavog kamenčića.

$$\left.\begin{array}{l} 28 \cdot x + 3 \cdot y = 200 \\ y = 8.80 \end{array}\right\} \Rightarrow 28 \cdot x + 3 \cdot 8.80 = 200 \Rightarrow 28 \cdot x + 26.40 = 200 \Rightarrow 28 \cdot x = 200 - 26.40 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow 28 \cdot x = 173.60 \Rightarrow 28 \cdot x = 173.60 \ /:28 \Rightarrow x = 6.20.$$

Cijena jednog plavog kamenčića je 8.80 kn. Razlika u cijeni žutog i plavog kamenčića je:

$$y - x = 8.80\ kn - 6.20\ kn = 2.60\ kn.$$

Odgovor je pod C.

Vježba 089

Darija je dva dana kupovala ukrasne kamenčiće za ogrlice. Prvi je dan kupila 10 plavih i 8 žutih, a drugi dan 5 plavih i 16 žutih ukrasnih kamenčića. Oba je dana platila po 120 kn. Za koliko se kuna razlikuju cijene plavog i žutog kamenčića?

$A.$ za 1.00 kn $B.$ za 2.00 kn $C.$ za 3.00 kn $D.$ za 4.00 kn

Rezultat: C.

Zadatak 090 (Matea, strukovna škola)

Neka su x i y rješenja sustava $\begin{cases} 2\cdot x+3\cdot y=5 \\ 4\cdot x+5\cdot y=1 \end{cases}$. Koliko je x + y?

$A.\ -5 \qquad B.\ -2 \qquad C.\ 2 \qquad D.\ 1$

Rješenje 090

Ponovimo!

$$a=b \text{ i } c=d \Rightarrow a-c=b-d.$$

Zakon distribucije množenja prema zbrajanju.

$$a\cdot(b+c)=a\cdot b+a\cdot c \quad , \quad a\cdot b+a\cdot c=a\cdot(b+c).$$

1.inačica

$$\left.\begin{array}{l} 2\cdot x+3\cdot y=5 \\ 4\cdot x+5\cdot y=1 \end{array}\right\} \Rightarrow \left[\begin{array}{l}\text{metoda suprotnih} \\ \text{koeficijenata}\end{array}\right] \Rightarrow \left.\begin{array}{l} 2\cdot x+3\cdot y=5 \ /\cdot(-2) \\ 4\cdot x+5\cdot y=1 \end{array}\right\} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \left.\begin{array}{l} -4\cdot x-6\cdot y=-10 \\ 4\cdot x+5\cdot y=1 \end{array}\right\} \Rightarrow -y=-9 \Rightarrow -y=-9 \ /\cdot(-1) \Rightarrow y=9.$$

Računamo x.

$$\left.\begin{array}{l} 2\cdot x+3\cdot y=5 \\ y=9 \end{array}\right\} \Rightarrow 2\cdot x+3\cdot 9=5 \Rightarrow 2\cdot x+27=5 \Rightarrow 2\cdot x=5-27 \Rightarrow 2\cdot x=-22 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow 2\cdot x=-22 \ /:2 \Rightarrow x=-11.$$

Tada je

$$x+y=-11+9=-2.$$

Odgovor je pod B.

2.inačica

$$\left.\begin{array}{l} 2\cdot x+3\cdot y=5 \\ 4\cdot x+5\cdot y=1 \end{array}\right\} \Rightarrow \left[\begin{array}{l}\text{od druge jednadžbe} \\ \text{oduzmemo prvu}\end{array}\right] \Rightarrow 4\cdot x+5\cdot y-(2\cdot x+3\cdot y)=1-5 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow 4\cdot x+5\cdot y-2\cdot x-3\cdot y=-4 \Rightarrow 2\cdot x+2\cdot y=-4 \Rightarrow 2\cdot x+2\cdot y=-4 \ /:2 \Rightarrow x+y=-2.$$

Odgovor je pod B.

Vježba 090

Neka su x i y rješenja sustava $\begin{cases} 2\cdot x+3\cdot y=4 \\ 4\cdot x+5\cdot y=6 \end{cases}$. Koliko je x + y?

$A.\ -5 \qquad B.\ -2 \qquad C.\ 2 \qquad D.\ 1$

Rezultat: D.

Zadatak 091 (Anchy Moon, hotelijerska škola)

Kolika je vrijednost nepoznanice y u rješenju sustava $\begin{cases} -2\cdot x+7=3\cdot y \\ 3\cdot x+50=y \end{cases}$?

$A.\ 11 \qquad B.\ 12 \qquad C.\ \frac{351}{12} \qquad D.\ \frac{421}{11}$

Rješenje 091

Ponovimo!

Skratiti razlomak znači brojnik i nazivnik tog razlomka podijeliti istim brojem različitim od nule i jedinice

$$\frac{a \cdot n}{b \cdot n} = \frac{a}{b} \;,\; n \neq 0 \;,\; n \neq 1.$$

$$\left.\begin{aligned} -2 \cdot x + 7 = 3 \cdot y \\ 3 \cdot x + 50 = y \end{aligned}\right\} \Rightarrow \left.\begin{aligned} -2 \cdot x - 3 \cdot y = -7 \\ 3 \cdot x - y = -50 \end{aligned}\right\} \Rightarrow \left[\begin{array}{l} \text{metoda suprotnih} \\ \text{koeficijenata} \end{array}\right] \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \left.\begin{aligned} -2 \cdot x - 3 \cdot y = -7 \;/ \cdot 3 \\ 3 \cdot x - y = -50 \;/ \cdot 2 \end{aligned}\right\} \Rightarrow \left.\begin{aligned} -6 \cdot x - 9 \cdot y = -21 \\ 6 \cdot x - 2 \cdot y = -100 \end{aligned}\right\} \Rightarrow \left.\begin{aligned} -6 \cdot x - 9 \cdot y = -21 \\ 6 \cdot x - 2 \cdot y = -100 \end{aligned}\right\} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow -11 \cdot y = -121 \Rightarrow -11 \cdot y = -121 \;/ : (-11) \Rightarrow y = \frac{121}{11} \Rightarrow y = \frac{121}{11} \Rightarrow y = 11.$$

Odgovor je pod A.

Vježba 091

Kolika je vrijednost nepoznanice y u rješenju sustava $\begin{cases} -2 \cdot x + 13 = y \\ 5 \cdot x + 28 = 3 \cdot y \end{cases}$?

$$A.\ 11 \qquad B.\ 12 \qquad C.\ \frac{351}{12} \qquad D.\ \frac{421}{11}$$

Rezultat: A.

Zadatak 092 (Ivan, gimnazija)

Opseg prednjeg kotača je 2.8 m, a zadnjega 3.5 m. Koliki se put mora prijeći da prednji kotač učini 1000 okreta više od zadnjeg?

$$A.\ 7\ km \qquad B.\ 21\ km \qquad C.\ 28\ km \qquad D.\ 14\ km$$

Rješenje 092

Ponovimo!

$$a = b \Rightarrow b = a.$$

Kako zapisati da je broj a za n veći od broja b?

$$a = b + n \quad , \quad a - n = b \quad , \quad a - b = n.$$

Zakon distribucije množenja prema zbrajanju.

$$a \cdot (b + c) = a \cdot b + a \cdot c \quad , \quad a \cdot b + a \cdot c = a \cdot (b + c).$$

Opseg prednjeg kotača je O_1 = 2.8 m, a zadnjega O_2 = 3.5 m. Ako slovom x označimo broj okretaja prvog kotača, a slovom y drugoga kotača, prijeđeni put jednak je pa vrijedi

$$x \cdot O_1 = y \cdot O_2.$$

Budući da prednji kotač učini 1000 okreta više od zadnjeg, valjana je jednadžba:

$$x = 1000 + y.$$

Iz sustava jednadžbi izračunamo y (ili x).

$$\left.\begin{aligned} x \cdot O_1 = y \cdot O_2 \\ x = 1000 + y \end{aligned}\right\} \Rightarrow \left[\begin{array}{l} \text{metoda} \\ \text{supstitucije} \end{array}\right] \Rightarrow (1000 + y) \cdot O_1 = y \cdot O_2 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow 1000 \cdot O_1 + y \cdot O_1 = y \cdot O_2 \Rightarrow y \cdot O_2 = 1000 \cdot O_1 + y \cdot O_1 \Rightarrow y \cdot O_2 - y \cdot O_1 = 1000 \cdot O_1 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow y \cdot (O_2 - O_1) = 1000 \cdot O_1 \Rightarrow y \cdot (O_2 - O_1) = 1000 \cdot O_1 \;/ \cdot \frac{1}{O_2 - O_1} \Rightarrow y = \frac{1000 \cdot O_1}{O_2 - O_1} \Rightarrow$$

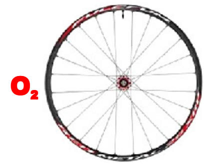
$$\Rightarrow y = \frac{1000 \cdot 2.8\ m}{3.5\ m - 2.8\ m} \Rightarrow y = 4000.$$

Računamo prijeđeni put.

$$y \cdot O_2 = 4000 \cdot 3.5 \ m = 14000 \ m = 14 \ km.$$

Odgovor je pod D.





Vježba 092

Opseg prednjeg kotača je 5.6 m, a zadnjega 7.0 m. Koliki se put mora prijeći da prednji kotač učini 1000 okreta više od zadnjeg?

$$A. \ 7 \ km \qquad B. \ 21 \ km \qquad C. \ 28 \ km \qquad D. \ 14 \ km$$

Rezultat: D.

Zadatak 093 (Tessa, gimnazija)

Prije sniženja cipele i torba koštali su ukupno 600 kn. Nakon što su cipele snižene 30%, a torba 50%, ukupna cijena bila je 364 kn. Kolika je bila njihova pojedinačna cijena prije sniženja?

Rješenje 093

Ponovimo!

Stoti dio nekog broja naziva se postotak. Piše se kao razlomak s nazivnikom 100.

Na primjer, $9\ \% = \frac{9}{100} \quad , \quad 81\ \% = \frac{81}{100} \quad , \quad 4.5\ \% = \frac{4.5}{100} \quad , \quad 0.3\ \% = \frac{0.3}{100} \quad , \quad p\ \% = \frac{p}{100}.$

Kako se računa "... p% od x..."?

$$\frac{p}{100} \cdot x.$$

Kako zapisati da se x smanji za p% ?

$$x - \frac{p}{100} \cdot x.$$

Zakon distribucije množenja prema zbrajanju.

$$a \cdot (b + c) = a \cdot b + a \cdot c \quad , \quad a \cdot b + a \cdot c = a \cdot (b + c).$$

1.inačica

Neka je:

- x – cijena cipela prije sniženja
- y – cijena torbe prije sniženja.



Prije sniženja cipele i torba koštali su ukupno 600 kn pa vrijedi jednadžba:

$$x + y = 600.$$

Nova cijena cipela nakon sniženja od 30% iznosi:

$$x - \frac{30}{100} \cdot x = x - 0.3 \cdot x = 0.7 \cdot x.$$

Nova cijena torbe nakon sniženja od 50% iznosi:

$$y - \frac{50}{100} \cdot y = y - 0.5 \cdot y = 0.5 \cdot y.$$



Nakon što su cipele snižene 30%, a torba 50%, ukupna cijena bila je 364 kn pa vrijedi jednadžba:

$$0.7 \cdot x + 0.5 \cdot y = 364.$$

Iz sustava jednadžbi izračunaju se x i y.

$$\left.\begin{array}{l} x + y = 600 \\ 0.7 \cdot x + 0.5 \cdot y = 364 \end{array}\right\} \Rightarrow \left.\begin{array}{l} x + y = 600 \\ 0.7 \cdot x + 0.5 \cdot y = 364 \ / \cdot 10 \end{array}\right\} \Rightarrow \left.\begin{array}{l} x + y = 600 \\ 7 \cdot x + 5 \cdot y = 3640 \end{array}\right\} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \left[\begin{array}{l} \text{metoda suprotnih} \\ \text{koeficijenata} \end{array}\right] \Rightarrow \left.\begin{array}{l} x + y = 600 \ / \cdot (-5) \\ 7 \cdot x + 5 \cdot y = 3640 \end{array}\right\} \Rightarrow \left.\begin{array}{l} -5 \cdot x - 5 \cdot y = -3000 \\ 7 \cdot x + 5 \cdot y = 3640 \end{array}\right\} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow 2 \cdot x = 640 \Rightarrow 2 \cdot x = 640 \ /: 2 \Rightarrow x = 320.$$

Računamo y.

$$\left.\begin{array}{l} x + y = 600 \\ x = 320 \end{array}\right\} \Rightarrow 320 + y = 600 \Rightarrow y = 600 - 320 \Rightarrow y = 280.$$

Cijena cipela prije sniženja bila je 320 kn.
Cijena torbe prije sniženja bila je 280 kn.

2.inačica

Neka je x cijena cipela prije sniženja. Prije sniženja cipele i torba koštali su ukupno 600 kn pa je cijena torbe

$$600 - x.$$

Nova cijena cipela nakon sniženja od 30% iznosi:

$$x - \frac{30}{100} \cdot x = x - 0.3 \cdot x = 0.7 \cdot x.$$

Nova cijena torbe nakon sniženja od 50% iznosi:

$$(600 - x) - \frac{50}{100} \cdot (600 - x) = 600 - x - 0.5 \cdot (600 - x) = 600 - x - 300 + 0.5 \cdot x = 300 - 0.5 \cdot x.$$

Poslije sniženja ukupna cijena cipela i torbe bila je 364 kn pa vrijedi jednadžba:

$$0.7 \cdot x + 300 - 0.5 \cdot x = 364 \Rightarrow 0.7 \cdot x - 0.5 \cdot x = 364 - 300 \Rightarrow 0.2 \cdot x = 64 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow 0.2 \cdot x = 64 \ / \cdot 5 \Rightarrow x = 320.$$

Cijena cipela je 320 kn, a torbe

$$600 \ kn - 320 \ kn = 280 \ kn.$$

Vježba 093

Prije sniženja cipele i torba koštali su ukupno 1200 kn. Nakon što su cipele snižene 30%, a torba 50%, ukupna cijena bila je 728 kn. Kolika je bila njihova pojedinačna cijena prije sniženja?

Rezultat: 640 kn cipele, 560 kn torba.

Zadatak 094 (Lana, gimnazija)

U svakoj od dviju posuda nalaze se određene količine vode. Izvršena su tri prelijevanja vode. Prvi se put iz prve posude prelije u drugu onoliko vode koliko u drugoj već ima vode. Drugi se put iz druge posude prelije u prvu onoliko vode koliko je u tom trenutku ima u prvoj posudi. Pri posljednjem prelijevanju iz prve se posude prelije u drugu onoliko vode koliko je već ima u drugoj posudi. Na kraju je u svakoj posudi bilo 160 litara vode. Koliko je vode bilo u svakoj od tih posuda na početku?

Rješenje 094

Ponovimo!

Zakon distribucije množenja prema zbrajanju.

$$a \cdot (b+c) = a \cdot b + a \cdot c \quad , \quad a \cdot b + a \cdot c = a \cdot (b+c).$$

Pretpostavimo da je na početku u prvoj posudi bilo x litara vode, a u drugoj y litara.

- Prvi se put iz prve posude prelije u drugu onoliko vode koliko u drugoj već ima vode.

	prva posuda	**druga posuda**
početno stanje	**x**	**y**
prvo prelijevanje	**x – y**	**y + y = 2 · y**

- Drugi se put iz druge posude prelije u prvu onoliko vode koliko je u tom trenutku ima u prvoj posudi.

	prva posuda	**druga posuda**
prvo prelijevanje	**x – y**	**2 · y**
drugo prelijevanje	**x – y + x – y = = 2 · x – 2 · y**	**2 · y – (x – y) = = 2 · y – x + y = 3 · y – x**

- Treći se put iz prve posude prelije u drugu onoliko vode koliko je već ima u drugoj posudi.

	prva posuda	**druga posuda**
drugo prelijevanje	**2 · x – 2 · y**	**3 · y – x**
treće prelijevanje	**2 · x – 2 · y – (3 · y – x) = = 2 · x – 2 · y – 3 · y + x = = 3 · x – 5 · y**	**3 · y – x + 3 · y – x = = – 2 · x + 6 · y**

Budući da je nakon trećeg prelijevanja u svakoj posudi bilo 160 litara vode, vrijedi sustav jednadžbi:

$$\left.\begin{array}{l} 3 \cdot x - 5 \cdot y = 160 \\ -2 \cdot x + 6 \cdot y = 160 \end{array}\right\} \Rightarrow \left[\begin{array}{l} \text{metoda suprotnih} \\ \text{koeficijenata} \end{array}\right] \Rightarrow \left.\begin{array}{l} 3 \cdot x - 5 \cdot y = 160 \\ -2 \cdot x + 6 \cdot y = 160 \ / \cdot \frac{3}{2} \end{array}\right\} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \left.\begin{array}{l} 3 \cdot x - 5 \cdot y = 160 \\ -3 \cdot x + 9 \cdot y = 240 \end{array}\right\} \Rightarrow 4 \cdot y = 400 \Rightarrow 4 \cdot y = 400 \ /: 4 \Rightarrow y = 100.$$

Računamo x.

$$\left.\begin{array}{l} 3 \cdot x - 5 \cdot y = 160 \\ y = 100 \end{array}\right\} \Rightarrow 3 \cdot x - 5 \cdot 100 = 160 \Rightarrow 3 \cdot x - 500 = 160 \Rightarrow 3 \cdot x = 160 + 500 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow 3 \cdot x = 660 \Rightarrow 3 \cdot x = 660 \ /: 3 \Rightarrow x = 220.$$

U prvoj posudi je bilo 220 litara vode, a u drugoj 100 litara vode.

Vježba 094

U svakoj od dviju posuda nalaze se određene količine vode. Izvršena su tri prelijevanja vode. Prvi se put iz prve posude prelije u drugu onoliko vode koliko u drugoj već ima vode. Drugi se put iz druge posude prelije u prvu onoliko vode koliko je u tom trenutku ima u prvoj posudi. Pri posljednjem prelijevanju iz prve se posude prelije u drugu onoliko vode koliko je već ima u drugoj posudi. Na kraju je u svakoj posudi bilo 320 litara vode. Koliko je vode bilo u svakoj od tih posuda na početku?

Rezultat: U prvoj posudi je bilo 440 litara vode, a u drugoj 200 litara vode.

Zadatak 095 (Vesna, ekonomska škola)

Razlika, zbroj i umnožak dvaju pozitivnih realnih brojeva odnose se kao 1 : 7 : 24. Odredite te brojeve.

Rješenje 095

Ponovimo!

$$a^1 = a \quad , \quad a^n \cdot a^m = a^{n+m}.$$

Omjer je kvocijent dviju istovrsnih veličina

$$a : b = k \text{ ili } \frac{a}{b} = k,$$

gdje je:

a – prvi član omjera,
b – drugi član omjera,
k – vrijednost (kvocijent) omjera.

Ako postoji n jednakih omjera

$$a_1 : b_1 = k$$
$$a_2 : b_2 = k$$
$$a_3 : b_3 = k$$
$$\dots$$
$$a_n : b_n = k,$$

produženi razmjer je

$$a_1 : a_2 : a_3 : \dots : a_n = b_1 : b_2 : b_3 : \dots : b_n.$$

Zakon distribucije množenja prema zbrajanju.

$$a \cdot (b + c) = a \cdot b + a \cdot c \quad , \quad a \cdot b + a \cdot c = a \cdot (b + c).$$

Da bi umnožak bio jednak nuli, dovoljno je da jedan faktor bude jednak nuli.

$$a \cdot b = 0 \Leftrightarrow a = 0 \text{ ili } b = 0 \text{ ili } a = b = 0.$$

Neka su x i y traženi brojevi. Budući da se njihova razlika, zbroj i umnožak odnose kao 1 : 7 : 24 možemo napisati produženi razmjer.

$$(x - y) : (x + y) : (x \cdot y) = 1 : 7 : 24.$$

Tada vrijedi:

$$(x - y) : (x + y) : (x \cdot y) = 1 : 7 : 24 \Rightarrow \left.\begin{array}{l} x - y = 1 \cdot k \\ x + y = 7 \cdot k \\ x \cdot y = 24 \cdot k \\ k - \text{koeficijent proporcionalnosti, } k > 0 \end{array}\right\}.$$

Iz prve dvije jednadžbe, metodom suprotnih koeficijenata, dobivamo:

$$\left.\begin{array}{l} x - y = 1 \cdot k \\ x + y = 7 \cdot k \end{array}\right\} \Rightarrow \begin{bmatrix} \text{metoda suprotnih} \\ \text{koeficijenata} \end{bmatrix} \Rightarrow 2 \cdot x = 8 \cdot k \Rightarrow 2 \cdot x = 8 \cdot k \ /:2 \Rightarrow x = 4 \cdot k.$$

Računamo y.

$$\left.\begin{array}{l} x + y = 7 \cdot k \\ x = 4 \cdot k \end{array}\right\} \Rightarrow 4 \cdot k + y = 7 \cdot k \Rightarrow y = 7 \cdot k - 4 \cdot k \Rightarrow y = 3 \cdot k.$$

U treću jednadžbu

$$x \cdot y = 24 \cdot k$$

uvrstimo dobivene vrijednosti za x i y pa slijedi:

$$\left.\begin{array}{l} x = 4 \cdot k \ , \ y = 3 \cdot k \\ x \cdot y = 24 \cdot k \end{array}\right\} \Rightarrow 4 \cdot k \cdot 3 \cdot k = 24 \cdot k \Rightarrow 12 \cdot k^2 = 24 \cdot k \Rightarrow 12 \cdot k^2 = 24 \cdot k \ /:12 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow k^2 = 2 \cdot k \Rightarrow k^2 - 2 \cdot k = 0 \Rightarrow k \cdot (k - 2) = 0 \Rightarrow \left.\begin{array}{l} k = 0 \\ k - 2 = 0 \end{array}\right\} \Rightarrow \left.\begin{array}{l} k = 0 \\ k = 2 \end{array}\right\} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \left.\begin{array}{l} k = 0 \text{ nema smisla jer je } k > 0 \\ k = 2 \end{array}\right\} \Rightarrow k = 2.$$

Traženi brojevi x i y su:

$$\left.\begin{array}{l} x = 4 \cdot k \\ y = 3 \cdot k \end{array}\right\} \Rightarrow \left[k = 2 \right] \Rightarrow \left.\begin{array}{l} x = 4 \cdot 2 \\ y = 3 \cdot 2 \end{array}\right\} \Rightarrow \left.\begin{array}{l} x = 8 \\ y = 6 \end{array}\right\}.$$

Vježba 095

Razlika, zbroj i umnožak dvaju pozitivnih realnih brojeva odnose se kao 2 : 14 : 48. Odredite te brojeve.

Rezultat: x = 8, y = 6.

Zadatak 096 (Antonia, gimnazija)

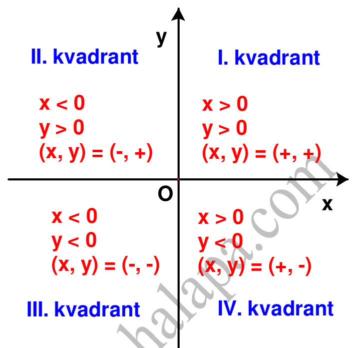
Odredi skup svih točaka T(x, y) ravnine za čije koordinate vrijedi $x \cdot y < 0$.

Rješenje 096

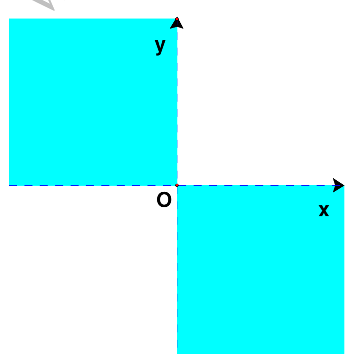
Ponovimo!

$$a \cdot b < 0 \Rightarrow \left.\begin{array}{l} a > 0 \;,\; b < 0 \\ a < 0 \;,\; b > 0 \end{array}\right\}.$$

Koordinatne osi (pravci x i y) dijele ravninu u četiri područja koja se zovu kvadranti. Kvadrante karakteriziraju predznaci koordinata njihovih točaka.



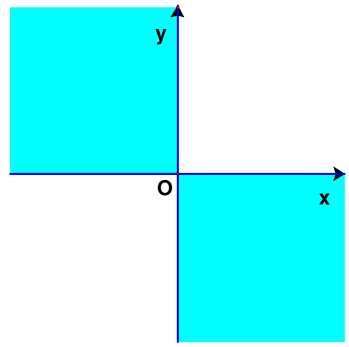
Budući da je umnožak koordinata neke točke negativan broj, koordinate te točke su brojevi suprotnih predznaka. Uvjet zadovoljavaju sve točke II. i IV. kvadranta, ali bez točaka na koordinatnim osima x i y.



Vježba 096

Odredi skup svih točaka T(x, y) ravnine za čije koordinate vrijedi $x \cdot y \le 0$.

Rezultat: Budući da je umnožak koordinata neke točke negativan broj ili nula, koordinate te točke su brojevi suprotnih predznaka ili jednaki nuli. Uvjet zadovoljavaju sve točke II. i IV. kvadranta i točke na koordinatnim osima x i y.



Zadatak 097 (Antonia, gimnazija)

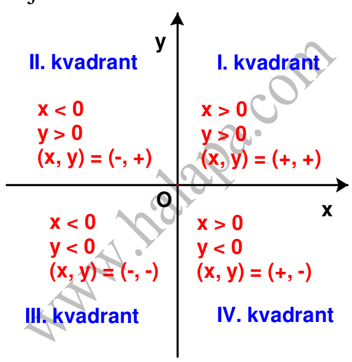
Odredi skup svih točaka T(x, y) ravnine za čije koordinate vrijedi $x \cdot y > 0$.

Rješenje 097

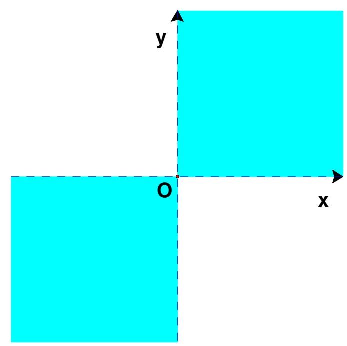
Ponovimo!

$$a \cdot b > 0 \;\Rightarrow\; \left.\begin{matrix} a > 0 \;\;,\;\; b > 0 \\ a < 0 \;\;,\;\; b < 0 \end{matrix}\right\}.$$

Koordinatne osi (pravci x i y) dijele ravninu u četiri područja koja se zovu kvadranti. Kvadrante karakteriziraju predznaci koordinata njihovih točaka.



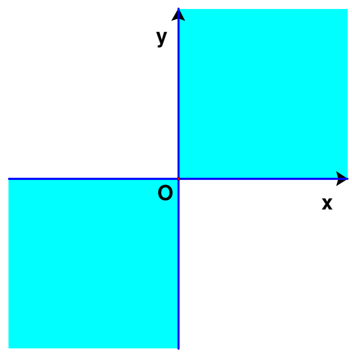
Budući da je umnožak koordinata neke točke pozitivan broj, koordinate te točke su brojevi jednakih predznaka. Uvjet zadovoljavaju sve točke I. i III. kvadranta, ali bez točaka na koordinatnim osima x i y.



Vježba 097

Odredi skup svih točaka T(x, y) ravnine za čije koordinate vrijedi $x \cdot y \geq 0$.

Rezultat: Budući da je umnožak koordinata neke točke pozitivan broj ili nula, koordinate te točke su brojevi jednakih predznaka ili jednaki nuli. Uvjet zadovoljavaju sve točke I. i III. kvadranta i točke na koordinatnim osima x i y.



Zadatak 098 (Katarina, maturantica)

Riješi sustav jednadžbi: $\begin{cases} x = 3 \cdot y \\ y^2 = 6 \cdot x \end{cases}.$

Rješenje 098

Ponovimo!

Zakon distribucije množenja prema zbrajanju.

$$a \cdot (b + c) = a \cdot b + a \cdot c \quad , \quad a \cdot b + a \cdot c = a \cdot (b + c).$$

Da bi umnožak bio jednak nuli, dovoljno je da jedan faktor bude jednak nuli.

$$a \cdot b = 0 \Leftrightarrow a = 0 \text{ ili } b = 0 \text{ ili } a = b = 0.$$

$$\left.\begin{array}{l} x = 3 \cdot y \\ y^2 = 6 \cdot x \end{array}\right\} \Rightarrow \left[\begin{array}{l} \text{metoda} \\ \text{zamjene} \end{array}\right] \Rightarrow y^2 = 6 \cdot 3 \cdot y \Rightarrow y^2 = 18 \cdot y \Rightarrow y^2 - 18 \cdot y = 0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow y \cdot (y - 18) = 0 \Rightarrow \left.\begin{array}{l} y = 0 \\ y - 18 = 0 \end{array}\right\} \Rightarrow \left.\begin{array}{l} y_1 = 0 \\ y_2 = 18 \end{array}\right\}.$$

Računamo x.

$$\left.\begin{array}{l} y_1 = 0 \\ y_2 = 18 \end{array}\right\} \Rightarrow [\, x = 3 \cdot y \,] \Rightarrow \left.\begin{array}{l} x_1 = 3 \cdot 0 \\ x_2 = 3 \cdot 18 \end{array}\right\} \Rightarrow \left.\begin{array}{l} x_1 = 0 \\ x_2 = 54 \end{array}\right\}.$$

Rješenja sustava jednadžbi glase:

$$(x_1, y_1) = (0, 0) \quad , \quad (x_2, y_2) = (54, 18).$$

Vježba 098

Riješi sustav jednadžbi: $\begin{cases} x = 6 \cdot y \\ y^2 = 3 \cdot x \end{cases}.$

Rezultat: $(x_1, y_1) = (0, 0) \quad , \quad (x_2, y_2) = (108, 18).$

Zadatak 099 (4A, TUPŠ)

Riješi sustav jednadžbi: $\begin{cases} y = \dfrac{2 \cdot x - 4}{5} \\ x + 10 \cdot y = -\dfrac{11}{2} \end{cases}.$

Rješenje 099

Ponovimo!

$$n=\frac{n}{1} \quad , \quad \frac{a}{b}+\frac{c}{d}=\frac{a\cdot d+b\cdot c}{b\cdot d}.$$

Skratiti razlomak znači brojnik i nazivnik tog razlomka podijeliti istim brojem različitim od nule i jedinice.

$$\frac{a\cdot n}{b\cdot n}=\frac{a}{b} \ , \ n\neq 0 \ , \ n\neq 1.$$

Zakon distribucije množenja prema zbrajanju.

$$a\cdot(b+c)=a\cdot b+a\cdot c \quad , \quad a\cdot b+a\cdot c=a\cdot(b+c).$$

1.inačica

$$\left.\begin{array}{l} y=\frac{2\cdot x-4}{5} \\ x+10\cdot y=-\frac{11}{2} \end{array}\right\} \Rightarrow \left[\begin{array}{l}\text{metoda} \\ \text{zamjene}\end{array}\right] \Rightarrow x+10\cdot\frac{2\cdot x-4}{5}=-\frac{11}{2} \Rightarrow x+10\cdot\frac{2\cdot x-4}{5}=-\frac{11}{2} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow x+2\cdot(2\cdot x-4)=-\frac{11}{2} \Rightarrow x+4\cdot x-8=-\frac{11}{2} \Rightarrow x+4\cdot x-8=-\frac{11}{2} \ /\cdot 2 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow 2\cdot x+8\cdot x-16=-11 \Rightarrow 2\cdot x+8\cdot x=-11+16 \Rightarrow 10\cdot x=5 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow 10\cdot x=5 \ /:5 \Rightarrow x=\frac{5}{10} \Rightarrow x=\frac{5}{10} \Rightarrow x=\frac{1}{2}.$$

Računamo y.

$$\left.\begin{array}{l} y=\frac{2\cdot x-4}{5} \\ x=\frac{1}{2} \end{array}\right\} \Rightarrow y=\frac{2\cdot\frac{1}{2}-4}{5} \Rightarrow y=\frac{2\cdot\frac{1}{2}-4}{5} \Rightarrow y=\frac{1-4}{5} \Rightarrow y=-\frac{3}{5}.$$

Rješenje sustava glasi:

$$(x,\ y)=\left(\frac{1}{2},\ -\frac{3}{5}\right).$$

2.inačica

$$\left.\begin{array}{l} y=\frac{2\cdot x-4}{5} \\ x+10\cdot y=-\frac{11}{2} \end{array}\right\} \Rightarrow \left.\begin{array}{l} y=\frac{2\cdot x-4}{5} \ /\cdot 5 \\ x+10\cdot y=-\frac{11}{2} \ /\cdot 2 \end{array}\right\} \Rightarrow \left.\begin{array}{l} 5\cdot y=2\cdot x-4 \\ 2\cdot x+20\cdot y=-11 \end{array}\right\} \Rightarrow \left.\begin{array}{l} -2\cdot x+5\cdot y=-4 \\ 2\cdot x+20\cdot y=-11 \end{array}\right\} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \left[\begin{array}{l}\text{metoda suprotnih} \\ \text{koeficijenata}\end{array}\right] \Rightarrow 25\cdot y=-15 \Rightarrow 25\cdot y=-15 \ /:25 \Rightarrow y=-\frac{15}{25} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow y=-\frac{15}{25} \Rightarrow y=-\frac{3}{5}.$$

Računamo x.

$$\left.\begin{array}{l} x+10\cdot y=-\frac{11}{2} \\ y=-\frac{3}{5} \end{array}\right\} \Rightarrow x+10\cdot\left(-\frac{3}{5}\right)=-\frac{11}{2} \Rightarrow x+10\cdot\left(-\frac{3}{5}\right)=-\frac{11}{2} \Rightarrow x+2\cdot(-3)=-\frac{11}{2} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow x-6=-\frac{11}{2} \Rightarrow x=-\frac{11}{2}+6 \Rightarrow x=-\frac{11}{2}+\frac{6}{1} \Rightarrow x=\frac{-11+12}{2} \Rightarrow x=\frac{1}{2}.$$

Rješenje sustava glasi:

$$(x,\ y)=\left(\frac{1}{2},\ -\frac{3}{5}\right).$$

Vježba 099

Riješi sustav jednadžbi: $\begin{cases} 5\cdot y=2\cdot(x-2) \\ 2\cdot x+20\cdot y=-11 \end{cases}.$

Rezultat: $(x,\ y)=\left(\frac{1}{2},\ -\frac{3}{5}\right).$

Zadatak 100 (Mario, gimnazija)

Ako je $(x,\ y,\ z)$ rješenje sustava $\begin{cases} 2\cdot x+3\cdot y+5\cdot z=10 \\ 3\cdot x+7\cdot y+4\cdot z=3 \\ x+2\cdot y+2\cdot z=3 \end{cases}$, onda $6\cdot x+12\cdot y+11\cdot z$ iznosi:

$A.\ 4 \qquad B.\ 9 \qquad C.\ 16 \qquad D.\ 25$

Rješenje 100

Ponovimo!

$$\left.\begin{matrix} a=b \\ c=d \end{matrix}\right\} \Rightarrow a+c=b+d.$$

$$\left.\begin{matrix} 2\cdot x+3\cdot y+5\cdot z=10 \\ 3\cdot x+7\cdot y+4\cdot z=3 \\ x+2\cdot y+2\cdot z=3 \end{matrix}\right\} \Rightarrow \begin{bmatrix} \text{zbrojimo} \\ \text{jednadžbe} \end{bmatrix} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow\ 2\cdot x+3\cdot y+5\cdot z+3\cdot x+7\cdot y+4\cdot z+x+2\cdot y+2\cdot z=10+3+3\ \Rightarrow$$

$$\Rightarrow\ 6\cdot x+12\cdot y+11\cdot z=16.$$

Odgovor je pod C.

Vježba 100

Ako je $(x,\ y,\ z)$ rješenje sustava $\begin{cases} 2\cdot x+3\cdot y+5\cdot z=7 \\ 3\cdot x+7\cdot y+4\cdot z=1 \\ x+2\cdot y+2\cdot z=1 \end{cases}$, onda $6\cdot x+12\cdot y+11\cdot z$ iznosi:

$A.\ 4 \qquad B.\ 9 \qquad C.\ 16 \qquad D.\ 25$

Rezultat: B.